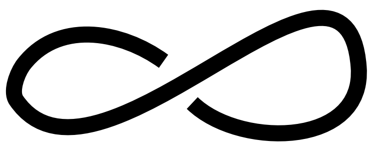
Nudos Matemáticos
¿Qué son? ¿Para qué sirven?

Un nudo matemático es como un nudo cotidiano con la particularidad de que sus extremos están unidos. Esto quiere decir, por un lado, que los nudos matemáticos no se pueden desanudar, sólo cortándolos es posible deshacerlos. Por otro lado, cualquier nudo cotidiano –ya sea de marinero, de tejido, o de cualquier otro contexto– al que se le han unido sus extremos es un objeto de estudio de las matemáticas, particularmente de la topología.

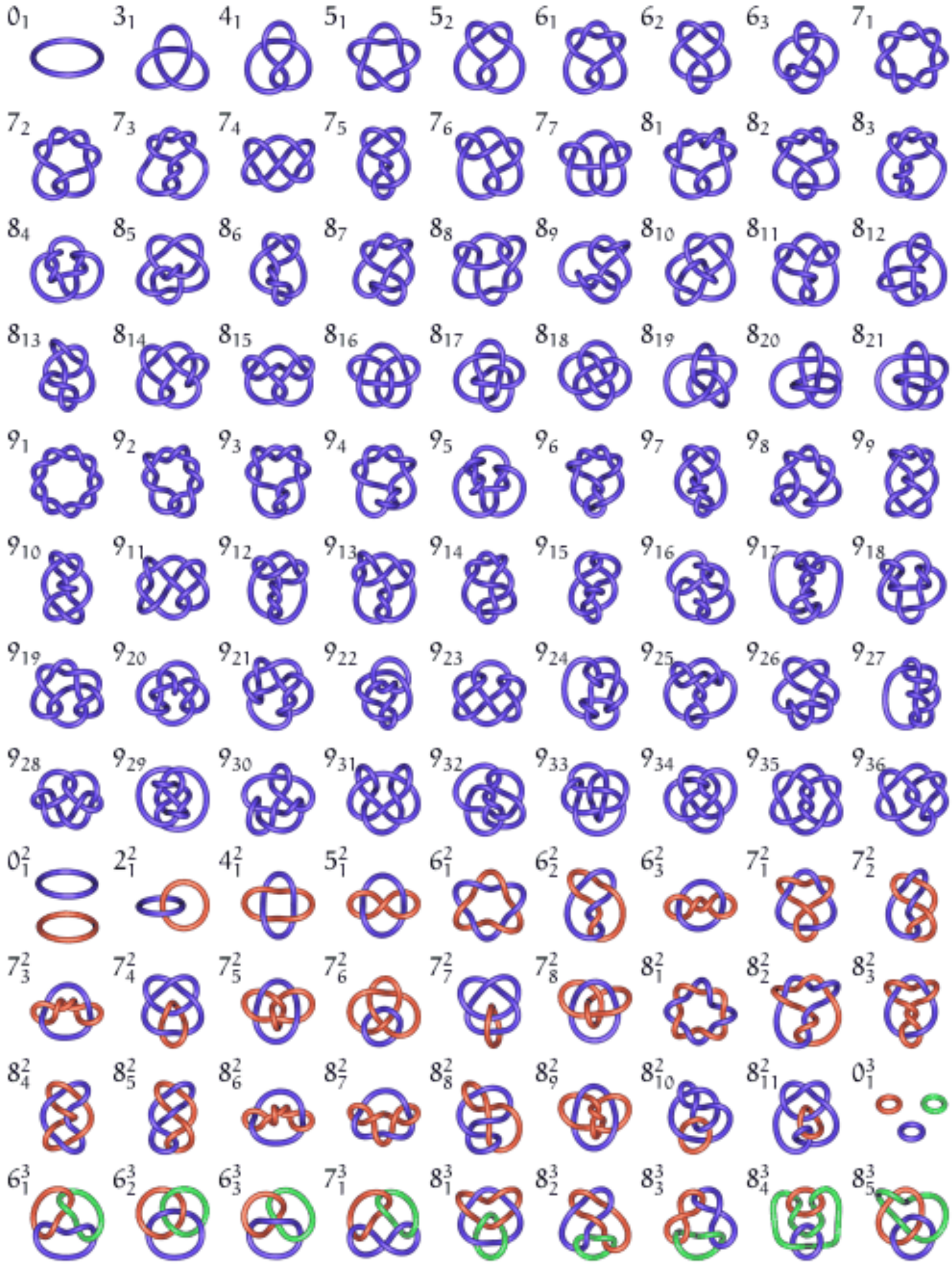
A pesar de que existen registros antiquísimos del uso tanto utilitario como simbólico (fuerza, protección, sabiduría, eternidad, etc) en culturas tan distantes como la celta y la china, entre muchas otras [1], los nudos han sido estudiados matemáticamente desde hace apenas un par de siglos.

Izquierda: Valknut, símbolo nórdico; centro: Triqueta, símbolo indoeuropeo; derecha: “Nudo infinito” en escrito birmano. *Imágenes tomadas de Wikipedia*.

Un primer problema matemático es clasificarlos. Es decir, enumerarlos y saber diferenciarlos. Cualquier nudo con tres cruces “verdaderos” es –desde el punto de vista de la topología– el mismo (o su reflejo). Éste es el nudo más sencillo, se conoce como el nudo trébol. También existe sólo un nudo con cuatro cruces, y dos diferentes con cinco… al 2025 se han descrito todos los nudos con menos de 22 cruces.

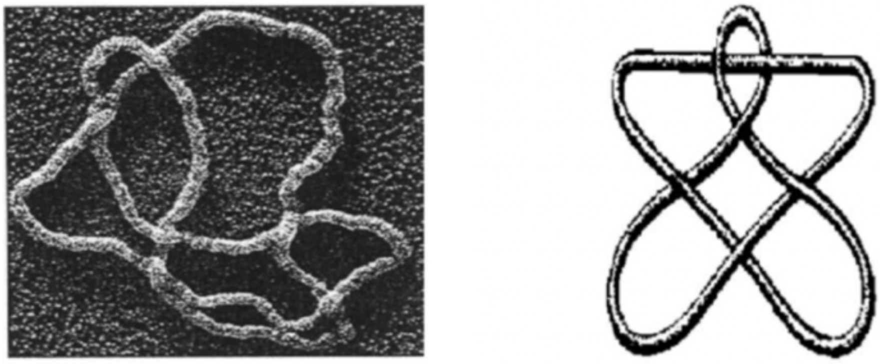


Un cruce “falso” se puede deshacer.



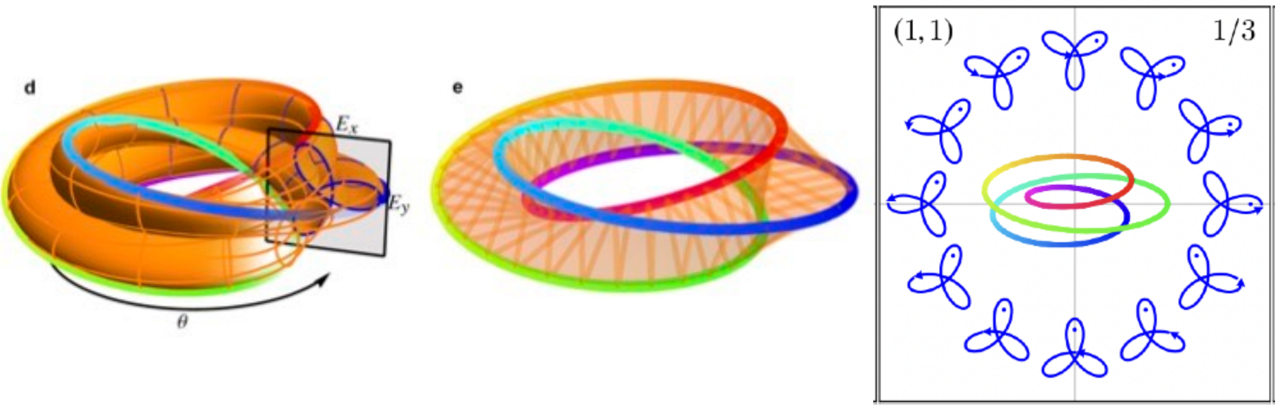
Esta clasificación es relevante en varios ámbitos. Los nudos están presentes en la naturaleza y a quienes se los han encontrado les ha resultado útil la existencia de esta clasificación. Quizás la aparición más sobresaliente de los nudos en la naturaleza es el descubrimiento de que la molécula del ADN puede estar anudada [2,3], como nudo matemático.

Sorprendentemente, existe una enzima llamada Topoisomerasa cuya función específica es precisamente controlar la estructura anudada del ADN. Es decir, formar dicho nudo, cortarlo, desanudarlo o anudarlo más según sus necesidades de espacio, función o tensión.



Izquierda: imagen de microscopía electrónica con la molécula de ADN anudada; derecha: nudo matemático de seis cruces correspondiente. *Imágenes de [2,3].*

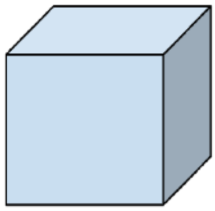
También se han encontrado rayos de luz anudados [4]: en un estudio de óptica, al investigar ciertas propiedades de polarización, hallaron que las componentes cromáticas (distintas frecuencias que componen un rayo de luz) viajan en un campo electromagnético con la forma de un "nudo tórico", esto es, un nudo enrollado en un toro o dona.



Izquierda y centro: campo en forma de nudo tórico en color naranja; izquierda: nudo tórico al centro y alrededor, en azul, las secciones transversales de dicho campo. *Imágenes de [4].*

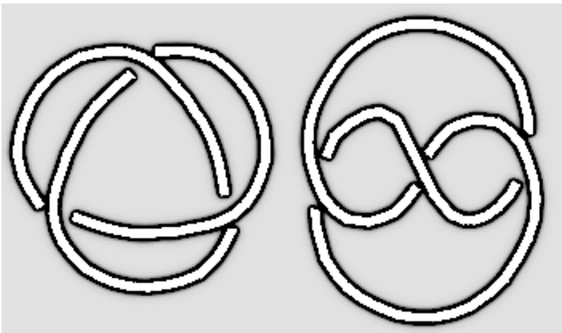
Otro elemento importante en el estudio matemático de los nudos es la búsqueda de *invariantes*. Los invariantes son propiedades muy buscadas en casi todas las ramas de las matemáticas. Son aquellas cosas que los objetos conservan después de ser manipulados. Por ejemplo, en un croquis dibujado en perspectiva, la distancia **no** es un invariante: si nos paramos sobre unas vías del tren y vemos al horizonte, parecerá que las vías se van juntando conforme se alejan, aunque estén siempre a la misma distancia.

Para la perspectiva, los invariantes más comunes son la concurrencia y la colinealidad: tres rectas que se cruzan en un punto, al igual que tres puntos que pertenecen a una misma recta, siempre serán así sin importar desde dónde se les mire.



Un cubo en perspectiva no conserva las longitudes de sus lados ni ángulos entre ellos. Pero cada vértice será siempre el punto donde concurren tres lados.

Para el entendimiento de los nudos ha sido necesaria la implementación de una gran cantidad de invariantes. Esto se debe en parte a que problemas que podrían parecer relativamente sencillos pueden resultar increíblemente complicados. Por ejemplo, dados dos nudos, ¿puedes manipularlos para transformar uno en el otro? O dicho de otro modo, ¿esos

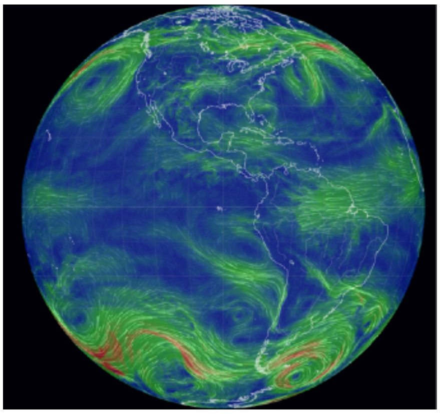
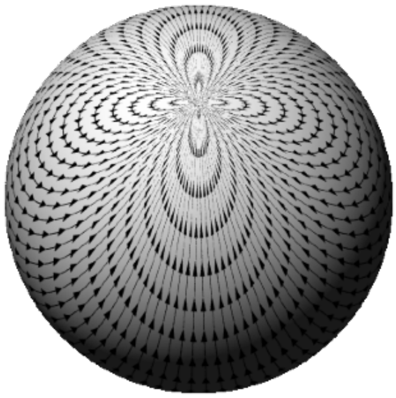


¿Es posible deformar uno de estos nudos en el otro?

dos nudos son equivalentes? Una manera de contestar negativamente a esta pregunta es mostrando que difieren en alguno de sus invariantes. Por ejemplo, el (mínimo) número de cruces. Otros invariantes tienen nombres como ancho, coloreabilidad, longitud de cuerda[1]…

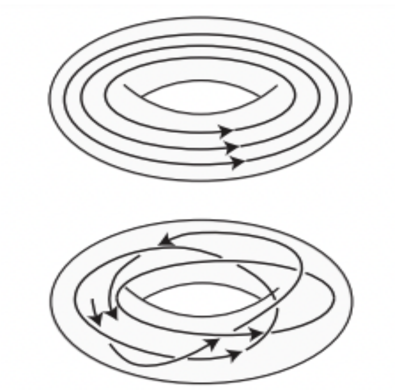
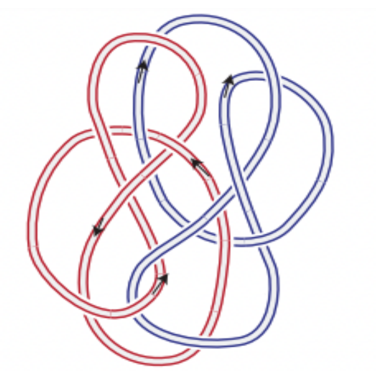
La vasta cantidad de invariantes de nudos también es útil en otras ramas de las matemáticas. Por ejemplo los campos vectoriales, que podemos pensar como las flechitas que describen la fuerza y dirección de un flujo como una corriente de aire. Pongamos como ejemplo concreto a las burbujas anulares creadas por algunos delfines.

[1] Una lista de invariantes de nudos y sus descripciones se puede encontrar [aquí](#).

Izquierda: representación de corrientes de aire en el mundo (*imagen tomada de earth.nullschool.net*); centro: líneas de un campo vectorial en una esfera (*animación tomada de wikipedia*); derecha: burbuja anular formada por un delfín (*imagen tomada de https://youtu.be/ulVk5rSsSq8*).

Para los campos vectoriales que describen la formación de este tipo de burbujas se conocen muy pocos invariantes. El más importante llamado la *helicidad* tiene que ver con qué tanto se entrelazan las corrientes alrededor de la burbuja anular. Varios estudios actuales se dedican a la búsqueda de adaptaciones de invariantes de nudos para flujos de campos vectoriales [5], lo que podría ayudar a entender qué pasa en el preciso momento en que se destruye una de estas burbujas anulares.

Izquierda: representaciones de líneas de flujo en una burbuja anular (tórica);
derecha: representación de líneas de flujo en un enlace de dos nudos.
Imágenes de [5].

La teoría de nudos es un área de investigación bastante activa tanto en el Instituto de Matemáticas de la UNAM como en varios otros lugares de la república. Esto se debe en buena parte gracias al legado de Francisco González-Acuña, mejor conocido como Fico, uno de los matemáticos más influyentes del país. A él se suman Mario Eudave Muñoz, Fabiola Manjarrez Gutiérrez y Bruno Cisneros de la Cruz, quienes también realizan investigación en esta área.

Darío Alatorre Guzmán
Verano 2025

Referencias

[1] Turner, J. C., Van De Griend, P., & Warner, C. (Eds.). (1996). History and science of knots (Vol. 11). World Scientific.

[2] Ernst, C., & Sumners, D. (1990, November). A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Vol. 108, No. 3, pp. 489-515). *Cambridge University Press*.

[3] Wasserman, S. A., Dungan, J. M., & Cozzarelli, N. R. (1985). Discovery of a predicted DNA knot substantiates a model for site-specific recombination. *Science*, 229(4709), 171-174.

[4] Pisanty, E., Machado, G.J., Vicuña-Hernández, V. et al. Knotting fractional-order knots with the polarization state of light. *Nat. Photonics* 13, 569–574 (2019). https://doi.org/10.1038/s41566-019-0450-2

[5] Dehornoy, P., & Rechtman, A. (2022). Vector fields and genus in dimension 3. *International Mathematics Research Notices*, 2022(5), 3262-3277.